Preparación Olimpiada Matemática
Curso 2017/18

20 de febrero de 2018

1. Sea n un número natural:

   a) Prueba que $(2n+1)^3 - (2n-1)^3$ es la suma de tres cuadrados perfectos.

   b) Prueba que $(2n+1)^3 - 2$ es la suma de $3n-1$ cuadrados perfectos mayores que 1.

2. Sea f una función lineal tal que $f(0) = -5$ y $f(f(0)) = -15$. Encuentra todos los valores k reales para los que las soluciones de la desigualdad

   $$f(x)f(k-x) > 0$$

   forman un intervalo de longitud 2.

3. Sabemos que las raíces de la ecuación $ax^2 - 4bx + 4c = 0$ con $a > 0$ están en el intervalo $[2, 3]$. Probar que:

   a) $a \leq b \leq c < a + b$.

   b) $\dfrac{a}{a+c} + \dfrac{b}{b+a} > \dfrac{c}{b+c}$.

4. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_9$ números reales no negativos de modo que $a_1 = a_9 = 0$ y al menos uno de los restantes números no es cero.

   a) Prueba que algún $i \in \{2, 3, \ldots, 8\}$ debe tenerse que

   $$a_{i-1} + a_{i+1} < 2a_i.$$

   b) ¿Qué podemos decir si cambiamos $2a_i$ por $1,9a_i$ en la desigualdad anterior?

5. Encuentra todas las soluciones reales del sistema de ecuaciones:

   $$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_{2004} = 2004 \\ x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_{2004}^4 = x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_{2004}^3 \end{cases}$$

6. Sea $f\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ ($\mathbb{Z}^+$ incluye al 0) tal que:

   a) $f(n+1) > f(n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.
   b) $f(m + f(n)) = f(m) + n + 1$ para todo $m, n \in \mathbb{Z}^+$.

   Calcula $f(2018)$.

7. Tenemos dos colecciones de cartas, una con n cartas y otra con m cartas. Los jugadores A y B alternan turnos, comenzando A, pudiendo realizar una de las siguientes tres acciones en cada turno:

   a) Retirar una carta de cualquiera de las dos colecciones.
   b) Retirara una carta de cada colección.
   c) Desplazar una carta de una colección a la otra.

   El ganador es el primero que logre retirar la última carta de la mesa. Determina si existe alguna estrategia ganadora en función de los parámetros m y n para alguno de los jugadores.

8. Encuentra todas las funciones cuadráticas $f(x) = ax^2 + bx + c$ para las cuales existe un intervalo (h, k) tal que si $x \in (h, k)$ tenemos que $f(x)f(x+1) < 0$ y $f(x)f(x-1) < 0$.

9. Encuentra todas las funciones $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(x)f(y) = f(xy) + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

   para todos los número reales positivos x e y.

10. Determina todas las funciones $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ que satisfacen lo siguiente:

    a) $f(xf(y))f(y) = f(x+y)$ para todo $x, y \geq 0$.
    b) $f(2) = 0$.
    c) $f(x) \neq 0$ para $0 \leq x < 2$.

Problemas sacados del libro “Cuban Mathematical Olympiads”, XYZ Press, 2017.